

7. cvičení - řešení

Příklad 1 (a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ spojitá}\}$ s operacemi sčítání po složkách a násobení reálným číslem po složkách.

Sčítání a násobení v prostoru V je definováno takto: pro $f, g \in V, a \in \mathbb{R}$ a $x \in \mathbb{R}$ platí $(a \cdot f + g)(x) = a \cdot f(x) + g(x)$.

Zřejmě $a \cdot f + g$ je opět spojitá funkce z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$, tedy je prvkem V .

Nulový prvek je funkce, která je konstantně nulová, tedy $\mathbf{o}(x) = 0$, což je zřejmě prvek V .

Dále vidíme, že pokud pro $f \in V$ definujeme funkci $-f$ jako $(-f)(x) = -(f(x))$, tak dostáváme 4. vlastnost z definice vektorového prostoru.

Zbylé části definice vektorového prostoru jsou zřejmé/dají se snadno ověřit.

Příklad 1 (b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$ s operacemi sčítání po složkách a násobení komplexním číslem po složkách.

Operace jsou definovány následujícím způsobem:

Pro $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V = \mathbb{C}^2, \alpha \in \mathbb{C}$ platí $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ a $\alpha \cdot (x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$.

Komutativita a asociativita sčítání funguje v $\mathbb{C}$, tedy v našem prostoru V lze snadno ověřit.

Nulový prvek je $(0, 0)$, prvek opačný k prvku $(x_1, x_2) \in V$ je $(-x_1, -x_2) \in V$.

Všechny ostatní části definice vektorového prostoru jsou zřejmě splněny.

Příklad 1 (c) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{R}^2$ s operacemi sčítání po složkách a násobení komplexním číslem po složkách.

Vezměme si $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ a $i \in \mathbb{C}$. Pak dle definice násobení platí, že $i \cdot (1, 0) = (i, 0)$, což ale není prvek $\mathbb{R}^2$, tedy operace násobení nesplňuje toto: $\because \mathbb{K} \times V = \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow V = \mathbb{R}^2$, tedy nejde o vektorový prostor nad $\mathbb{C}$.

Příklad 1 (d) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p \text{ polynom splňující } p(0) = 0\}$ s operacemi sčítání po složkách a násobení reálným číslem po složkách.

Všimněme si, že součet polynomů i násobek polynomů jsou opět polynomy. Navíc pro $p_1, p_2 \in V$ a $\alpha \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ platí $(\alpha \cdot p_1 + p_2)(0) = \alpha \cdot p_1(0) + p_2(0) = \alpha \cdot 0 + 0 = 0 + 0 = 0$, tedy $\alpha \cdot p_1 + p_2 \in V$.

Dále je funkce $\mathbf{o}(x) = 0$ (tedy konstantní nula) zřejmě nulový prvek a je v V . Opačný prvek k $p \in V$ je $(-1) \cdot p$.

Zbytek vlastností definice vektorového prostoru lze snadno ověřit.

Příklad 1 (e) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$ s operacemi sčítání po složkách a násobení reálným číslem po složkách.

Zřejmě platí, že $(1, 0) \in V$ a $2 \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pak ovšem $2 \cdot (1, 0) = (2, 0) \notin V$. Tedy nejde o vektorový prostor, neb funkce $\cdot$ nezobrazuje do V .

Příklad 1 (f) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{Q}$ s kanonicky definovanými operacemi sčítání a násobení.

Zřejmě $1 \in \mathbb{Q}, \pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pak $\pi \cdot 1 = \pi \notin \mathbb{Q}$, tedy násobení skalárem nezobrazuje do V , tedy nejde o vektorový prostor nad $\mathbb{R}$.

Příklad 2 (a) $X = \mathbb{R}^3$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y = 0, z = 0\}$

Zřejmě $W = \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ je neprázdná množina a pro každé $x, y \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ platí $\alpha \cdot (x, 0, 0) + (y, 0, 0) = (\alpha \cdot x + y, 0, 0) \in W$.

Příklad 2 (b) $X = \mathbb{R}^3$ $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 1\}$

Platí, že $(1, 0, 0) \in W$, $2 \in \mathbb{R}$ ale $2 \cdot (1, 0, 0) = (2, 0, 0) \notin W$, neb $2 + 0 - 0 \neq 1$. Tedy W není uzavřen na násobení skalárem, tedy nejde o podprostor.

Příklad 2 (c) $X = \mathcal{C}([0, 1])$ $W = \{f \in X; f(\frac{1}{2}) = 0\}$

Množina W obsahuje například funkci $f(x) = 0$ (konstantní nulu), tedy je neprázdná.

Zřejmě $(\alpha \cdot f + g)(\frac{1}{2}) = \alpha \cdot f(\frac{1}{2}) + g(\frac{1}{2}) = \alpha \cdot 0 + 0 = 0$, tedy $\alpha \cdot f + g \in W$ pro každé $\alpha \in \mathbb{R}$, $f, g \in W$. Tím jsme ověřili všechny části definice podprostoru.

Příklad 2 (e) $X = \mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$ $W = \mathbb{R}$

Platí $i \in \mathbb{K} = \mathbb{C}$, $1 \in W = \mathbb{R}$ ale $i \cdot 1 = i \notin W = \mathbb{R}$. Tedy W není podprostor.

Příklad 3 (a) $(2, 0, 1), (0, 2, 3), (1, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$

Uvažme $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že

$$a \cdot (2, 0, 1) + b \cdot (0, 2, 3) + c \cdot (1, 3, 5) = \vec{0}$$

a ukažme, že pak nutně platí, že $a = b = c = 0$ - to nám dává, že zadané vektory jsou lineárně nezávislé.

Platí:

$$a \cdot (2, 0, 1) + b \cdot (0, 2, 3) + c \cdot (1, 3, 5) = (2a, 0, a) + (0, 2b, 3b) + (c, 3c, 5c) = (2a + c, 2b + 3c, a + 3b + 5c) = \vec{0}$$

Dostáváme tedy soustavu:

$$\begin{array}{rcl} 2a + c & = & 0 \\ 2b + 3c & = & 0 \\ a + 3b + 5c & = & 0 \\ \hline c & = & -2a \\ 2b - 6a & = & 0 \\ a + 3b - 10a & = & 0 \\ \hline c & = & -2a \\ b & = & 3a \\ 9a - 9a & = & 0 \end{array}$$

Dostáváme, že pro $a = 1, b = 3, c = -2$ daná soustava rovnic funguje. Nemusí tedy nutně platit, že $a = b = c = 0$, tedy vektory jsou lineárně závislé.

Příklad 3 (b) $\sin x, \cos x, x \in \mathcal{C}([0, 1])$

Opět uvažme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že $a \sin x + b \cos x + cx = 0$. Zkusme ukázat, že pak nutně $a = b = c = 0$.

Jde o rovnost funkcí, tedy rovnice $a \sin x + b \cos x + cx = 0$ má fungovat pro všechna $x \in [0, 1]$. Zkusme za x dosadit 0.

$$x = 0 \implies a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = 0 \implies b = 0$$

Dostáváme rovnici $a \sin x + cx = 0$ pro každé $x \in [0, 1]$. Funkce $f(x) = a \sin x + cx$ je konstantní na intervalu $[0, 1]$, tedy má nulovou derivaci. Pokud $a \neq 0$, tak pro každé $x \in (0, 1)$ platí:

$$f'(x) = a \cos x + c = 0$$

$$\cos x = -\frac{c}{a}$$

To by znamenalo, že $\cos$ je na $(0, 1)$ konstantní funkce, což není pravda. Dostáváme spor s tím, že $a \neq 0$. Proto platí, že $a = 0$ a z rovnosti $cx = 0$ pro každé $x \in [0, 1]$ pak plyne, že c je nulové, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3 (c) $i, i + 1 \in \mathbb{C}$ nad $\mathbb{C}$

Uvažme $a + bi, c + di \in \mathbb{C}$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, takové, že $(a + bi)i + (c + di)(i + 1) = 0$. Chceme ukázat, že pak $a = b = c = d = 0$.

Platí

$$(a + bi)i + (c + di)(i + 1) = ai + bi^2 + ci + c + di^2 + di = ai - b + ci + c - d + di = (a + c + d)i + (c - b - d) = 0$$

Dostáváme soustavu

$$a + c + d = 0$$

$$c - b - d = 0$$

Řešením této soustavy je například $c = 1, d = 1, b = 0, a = -2$. Existuje tedy netriviální kombinace zadaných vektorů, která je rovna nulovému vektoru. Nejde proto o lineárně nezávislé vektory.

Příklad 3 (d) $i, i + 1 \in \mathbb{C}$ nad $\mathbb{R}$

Uvažme $a, b \in \mathbb{R}$ taková, že $a \cdot i + b \cdot (i + 1) = 0$. Pak platí $ai + bi + b = (a + b)i + b = 0$. Komplexní číslo $yi + z$ je rovno nule právě tehdy, když $y = 0 = z$. Z toho plyne, že $a + b = 0$ a $b = 0$. Tedy nutně i $a = 0$. Dostáváme, že jediná lineární kombinace vektorů $i, i + 1$, která je rovna nule, je triviální kombinace. Tedy dané vektory jsou lineárně nezávislé.

Příklad 3 (e) $(1, 1), (3, 2), (1, 5) \in \mathbb{R}^2$

Uvažme $a, b, c \in \mathbb{R}$ takové, že $a(1, 1) + b(3, 2) + c(1, 5) = 0$. Dostáváme soustavu

$$a + 3b + c = 0$$

$$a + 2b + 5c = 0$$

$$-----$$

$$a = -c - 3b$$

$$-c - 3b + 2b + 5c$$

$$-----$$

$$a = -c - 3b$$

$$4c - b = 0$$

$$-----$$

$$a = -c - 3b$$

$$b = 4c$$

Zřejmě soustavu řeší například $c = 1, b = 4, a = -1 - 3 \cdot 4 = -13$. Nejde o nutně triviální lineární kombinaci, tedy jde o lineárně závislé vektory.

Příklad 3 (f) $(1, 2, 3, 4), (2, 4, 6, 8), (3, 6, 9, 13) \in \mathbb{R}^4$

Vidíme, že $2 \cdot (1, 2, 3, 4) = (2, 4, 6, 8)$, tedy první dva vektory jsou lineárně závislé, proto jsou i všechny tři skupiny vektorů lineárně závislé.

Pokud chceme pečlivěji ověřit definici: platí, že $2 \cdot (1, 2, 3, 4) - (2, 4, 6, 8) + 0 \cdot (3, 6, 9, 13) = 0$ a jde o netriviální kombinaci.

Příklad 4 (a) $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 1), (2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$

Zřejmě $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 1)\}$ a vektor $(1, 1)$ je bázi prostoru V . Tedy $\dim V = 1$.

Příklad 4 (b) $V = \mathbb{C}^2$ nad $\mathbb{R}$

Ukažme, že $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ je báze V . Zřejmě jde o podmnožinu V .

Pro $(a + bi, c + di) \in V$, kde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ platí, že $(a + bi, c + di) = a \cdot (1, 0) + b \cdot (i, 0) + c \cdot (0, 1) + d \cdot (0, i)$, tedy systém $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ generuje V .

Lze snadno ověřit, že $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ jsou LN.

Příklad 4 (c) $V = M(2 \times 3)$

Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jsou zřejmě lineárně nezávislé a generují V . Tedy $\dim V = 6$.

Příklad 4 (d) $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{x, x^2 + x, x^2 - x + 1, 2 + x\} \subset \mathcal{P}$

Všechny vektory z V jsou zřejmě lineárními kombinacemi polynomů $x, x^2, 1$. Dá se navíc snadno ukázat, že $1, x, x^2$ jsou lineárně nezávislé ve V . Tedy $\dim V = 3$

Příklad 4 (e) $V = \text{lin}_{\mathbb{K}}\{(1, 2, 3, -1), (2, 3, 9, 10), (2, -1, 1, -2)\} \subset \mathbb{R}^4$

Následující soustava rovnic má jediné řešení a to $a = b = c = 0$:

$$\begin{aligned} a + 2b + 2c &= 0 \\ 2a + 3b - c &= 0 \\ 3a + 9b + c &= 0 \\ -a + 10b - 2c &= 0 \end{aligned}$$

Tedy jde vektory $(1, 2, 3, -1), (2, 3, 9, 10), (2, -1, 1, -2)$ jsou LN. Navíc zřejmě generují V , tedy tvoří bázi V .

Příklad 4 (f) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Zřejmě $(1, -1, 0), (0, -2, 1) \in V$ (zkusili jsme za x a za z v rovnici dosadit 0 a dopočítali jsme zbytek). Navíc tyto vektory jsou lineárně nezávislé (lze snadno ověřit).

Ukažme nyní, že generují V . Uvažme $(x, y, z) \in V$. Pak $x = -y - 2z$, tedy máme bod $(-y - 2z, y, z)$. Pro $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $a \cdot (1, -1, 0) + b \cdot (0, -2, 1) = (-y - 2z, y, z)$, dávají soustavu

$$\begin{aligned} a &= -y - 2z \\ -a - 2b &= y \\ b &= z \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je $a = -y - 2z, b = z$, neb pak $-a - 2b = y + 2z - 2z = y$. Z toho plyne, že $(1, -1, 0), (0, -2, 1)$ generují V .

Příklad 4 (g) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

Zřejmě $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (-3y, y, z)\}$. Ukažme, že $(0, 0, 1), (-3, 1, 0)$ generují V . Lze snadno ukázat, že jde o LN prvky V . Navíc pro $y, z \in \mathbb{R}$ platí, že $(-3y, y, z) = y \cdot (-3, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)$. Z toho plyne, že dané vektory generují V .

Příklad 4 (h) $V = \{p \in \mathcal{P} : p^{(3)} = 0\} \subset \mathcal{P}$

Zřejmě V je prostor všech polynomů 2. stupně. Lze snadno ukázat, že $1, x, x^2$ tvoří bázi V .

Příklad 4 (i) $V = \{p \in \mathcal{P} : p^{(n)} = 0\} \subset \mathcal{P}, \quad n \in \mathbb{N}$

Obdobně si lze uvědomit, že V je prostor všech polynomů stupně $(n - 1)$. Jeho báze je pak

$$\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}\}.$$

Příklad 4 (j) $V = \mathcal{P}$

Platí, že $V = \{a_0 + \sum_{n=1}^k a_n x^n : k \in \mathbb{N}, a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}\}$.

Ukažme, že $B = \{1, x^n : n \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi V . Nejdříve ověříme lineární nezávislost. Ukažme nejdříve, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí, že $\{1, x, \dots, x^k\}$ je lineárně nezávislá. Použijeme matematickou indukci.

- $k = 0$, pak $\{1\}$ je LN.
- $k = 1$, pak pro $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $ax + b = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$ zjevně platí, že $a = b = 0$, tedy $\{1, x\}$ je LN.
- $k \mapsto k + 1$: Předpokládejme, že $\{1, x, \dots, x^k\}$ je LN a ukažme, že i $\{1, x, \dots, x^k, x^{k+1}\}$ je LN.

Vezměme $a_0, \dots, a_{k+1}$ takové, že $a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \dots + a_1x + a_0 = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Dosazením $x = 0$ dostáváme, že $a_0 = 0$. Máme tedy rovnost $a_{k+1}x^{k+1} + a_kx^k + \dots + a_1x = 0$, tedy $x(a_{k+1}x^k + a_kx^{k-1} + \dots + a_1) = 0$, která platí pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Z toho plyne, že pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ - a ze spojitosti polynomu tedy i pro každé $x \in \mathbb{R}$ - platí $a_{k+1}x^k + a_kx^{k-1} + \dots + a_1 = 0$. Z indukčního předpokladu pak plyne, že $a_{k+1} = \dots = a_1 = 0$. Dokázali jsme tedy, že $a_i = 0$ pro každé $i = 0, \dots, k, k + 1$. Dostáváme tedy, že $\{1, x, \dots, x^{k+1}\}$ je LN.

Uvažme nyní vektory $v_1, \dots, v_k \in B$ a ukažme, že jsou LN - z toho pak z definice plyne, že i celá B je LN.

Nalezneme $n_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ takové, že pro každé $i = 1, \dots, k$ platí $v_i = x^{n_i}$, kde x^0 chápeme jako konstantní funkci 1. Uvažme čísla $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ taková, že

$$a_k x^{n_k} + \dots + a_1 x^{n_1} = 0.$$

Nechť $q = \max\{n_i : i = 1, \dots, k\}$.

Definujme konečnou posloupnost $\{b_i\}_{i=0}^q$ takto: $b_i = \begin{cases} 0, & i \notin \{n_1, \dots, n_k\}, \\ a_j, & i = n_j. \end{cases}$

Pak máme rovnost

$$b_q x^q + \dots + b_1 x + b_0 = 0$$

pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jelikož vektory $\{1, x, \dots, x^q\}$ jsou LN, tak platí, že $b_q = \dots = b_1 = b_0$, tedy speciálně platí, že $a_1 = \dots = a_k = 0$. Z toho dostáváme, že $\{v_1, \dots, v_k\}$ je LN.

Lze snadno ukázat, že B generuje V . Jelikož B generuje V a je LN, tak jde o bázi. Zřejmě jde o bázi s nekonečně mnoha prvky, proto $\dim V = \infty$.

Příklad 4 (k) $V = \{\text{posloupnost reálných čísel}\}$

Zřejmě nulový prvek prostoru V je posloupnost $\{0\}_{n=1}^{\infty}$. Pro $i \in \mathbb{N}$ definujme posloupnost $e_i = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že $x_n = \begin{cases} 0, & n \neq i \\ 1, & n = i. \end{cases}$

Lze snadno ukázat, že $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ tvoří bázi.